1

Sean p y q números enteros tales que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}.$$

Demostrar que p es divisible entre 1979.

2

Dado un número natural n, denotaremos por $s(n)$ a la suma de los dígitos de n (por ejemplo, tenemos que $s(436) = 4 + 3 + 6 = 13$). Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$n + s(n) + s(s(n)) = 2018.$$

3

Determinar todos los números enteros positivos p y n tales que p es primo y

$$8p + 120 = 1 + 2 + \ldots + n.$$

4

Un entero positivo se llama *monótono* si sus dígitos en base decimal de izquierda a derecha forma una sucesión no decreciente. Demostrar que, para cada entero positivo n existe un número monótono de n dígitos que es cuadrado perfecto.

5

Dado un entero $n \geq 2$, demostrar que existe un conjunto S de n números enteros tales que $(a-b)^2$ divide a ab para cualesquiera $a, b \in S$.

6

Sean $a, p, n \in \mathbb{N}$ enteros positivos con p primo. Demostrar que si $2^p + 3^p = a^n$, entonces $n = 1$.

7

a. Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas. Decidir si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.
b. ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

8

Encontrar todos los números naturales n tales que

$$(n!)! = n!(2n-1)!$$

Aquí $a!$ denota el factorial de a, es decir, el producto de todos los números enteros entre 1 y a. Por ejemplo, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

9

Hallar todos los enteros positivos n tales que

$$n = s + u^2,$$

donde s es la suma de las cifras de n y u su cifra de las unidades.

10

Sean $m, n > 1$ dos números naturales distintos y primos entre sí. Demostrar que

$$\frac{\log_{10} m}{\log_{10} n}$$

no es un número racional.

11

Encontrar todas las soluciones naturales de la ecuación

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}.$$

12

Hallar el menor número natural que es suma de 9 naturales consecutivos, es suma de 10 naturales consecutivos y además es suma de 11 naturales consecutivos.